Problema P5

(i) Sia $r > 0$ e $\{x_j\}$ una numerazione dei razionali in $(0,1)$ (cioè $\{x_j : \ j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$). Definiamo

$$I_r^j := \Big(x_j - \frac{r}{2^{j+1}}, x_j + \frac{r}{2^{j+1}}\Big) \cap (0,1) \ , \qquad A_r^N := \bigcup_{j=1}^{N} I_r^j \ , \qquad A_r := \bigcup_{j\geq 1} I_r^j \ .$$

Si dimostri che $\overline{A_r} = [0,1]$ ma che, se $r < 1$, $A_r \subsetneqq (0,1)$. Si dimostri che, se $r < 1$, A_r è un aperto non misurabile secondo Peano–Jordan.

(ii) Sia S una superficie C^1 in $\mathbb{R}^n$ data da $S = \big\{\big(\bar{x}, \gamma(\bar{x})\big) : \ \bar{x} \in U\big\}$ con U aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$ misurabile secondo Peano–Jordan e $\gamma \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R})$. Per $\varepsilon > 0$, sia

$$V_\varepsilon := \big\{x = \big(\bar{x}, \gamma(\bar{x})\big) + t\nu(\bar{x}); \ \bar{x} \in U, \ t \in [0, \varepsilon]\big\} \ , \qquad \nu := \frac{(\nabla\gamma, -1)}{\sqrt{|\nabla\gamma|^2 + 1}} \ .$$

Dimostrare che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} dx = \int_U \sqrt{|\nabla\gamma|^2 + 1} \, d\bar{x} =: \int_S d\sigma \ .$$